On stability of saturated generic hypergraphs(Model theoretic aspects of the notion of independence and dimension)

安保, 勇希

数理解析研究所講究録
第 1555 巻 2007 年 9-17

On stability of saturated generic hypergraphs

筑波大学数理物質科学研究科 安保 勇希 (Yuki Anbo)
(Graduate school of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

概要

1997 年に J. Baldwin は strictly super stable な generic 構造は存在するか，という問題を提示した [1]．池田氏は generic graph に関してはそのような構造は存在しないということを示した [4]．本稿では generic hypergraph に関しても同じことが成立することを示す (定理 11).

1 序

R を 3 項関係記号とし，言語 $L = \{R\}$ の構造で以下を満たすものを hypergraph と呼ぶ：

- For all a_1, a_2, a_3 and $\sigma \in S_3$, $R(a_1, a_2, a_3) \Leftrightarrow R(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)})$. (symmetry)
- For all a_1, a_2, a_3, $R(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow a_1, a_2, a_3$ are distinct. (irreflexive)

以下，L-構造という言葉を hypergraph という意味で使う.

有限 L-構造 A に対して，関係 R が成立する A の点の 3 つ組の数を $r(A)$ で表すとき，A の (α に関する) 局所次元を $\delta_\alpha(A) = |A| - \alpha r(A)$ で定める．例えば，頂点が $\{a, b, c\}$ で $R(a, b, c)$ が成立しているとき，$\delta_\alpha(A) = 3 - 1 \cdot \alpha$ である．添え字の α は省略して書くことが多い．また，相対次元を $\delta(A/B) = \delta(AB) - \delta(B)$ で定義する.

$\mathbb{K}_\alpha = \{A : 有限\ L\text{-構造} \mid \delta_\alpha(A') \geq 0 \text{ for all } A' \subset A\}$ とおき，以下では $\mathbb{K}$ は $\mathbb{K}_\alpha$ の部分集合とする．有限 L-構造 の拡大 $A \subset B$ に対し，A が B で閉であるという関係を $A \leq B \Leftrightarrow \delta(A) \leq \delta(B')$ for any $A \subset B' \subset B$ で定める．一般の L-構造 $A \subset B$ に対しては，$A \leq B \Leftrightarrow A \cap B' \leq B'$ for any finite subset B' of B と定める.

定義 1. L-構造 M は以下の 3 条件件を満たす時 $\mathbb{K}$-*generic* であると言われる

- M は可算

- M の任意有限部分が $\mathbb{K}$ に属する
- $A \leq M,\ A \leq B \in \mathbb{K} \Rightarrow \exists B' \leq M$ *s.t.* B' は B と A 上同型

$\mathbb{K}$ が有限閉包性をもつとは，$\delta(A_i) > \delta(A_{i+1})$ となる $\mathbb{K}$ の元の拡大列 $A_0 \subset A_1 \subset \cdots$ が存在しないことをいう．

以下，$\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_\alpha$ は subhypergraphs に関して閉じていて有限閉包性をもつとし，M は saturated $\mathbb{K}$-generic hypergraph とする．

事実 2. *[2] $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_\alpha$ が部分構造について閉じていて有限閉包性をもち，M が saturated $\mathbb{K}$-generic hypergraph のとき，*

1. $T = \mathrm{Th}(M)$ *is stable*
2. $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow T$ *is ω-stable*

2 特徴的な hypergraph たち

定義 3. A が L-構造，$a, b \in A$ のとき，a と b の A における距離 $\mathrm{d}_A(a,b)$ を以下のように定める：

1. $\mathrm{d}_A(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. $\mathrm{d}_A(a,b) \leq 1 \Leftrightarrow \mathrm{d}_A(a,b) = 0$ *or* $\exists c \in A$ *s.t.* $R(a,b,c)$
3. $\mathrm{d}_A(a,b) \leq n \Leftrightarrow \exists a_1, \cdots, a_{n-1} \in A$ *s.t.* $a_0 = a, a_n = b$ とするとき，$\mathrm{d}_A(a_i, a_{i+1}) \leq 1$ *for each* $0 \leq i \leq n-1$
4. $\mathrm{d}_A(a,b) = n \Leftrightarrow \mathrm{d}_A(a,b) \leq n$ かつ $\mathrm{d}_A(a,b) \not\leq n-1$
5. $\mathrm{d}_A(a,b) = \infty \Leftrightarrow \forall n < \omega,\ \mathrm{d}_A(a,b) \not\leq n$

定義 4. $A \subset B$ を L-構造とするとき，A が B で連結であるとは，任意の $a, b \in A$ に対し，$\mathrm{d}_B(a,b) < \omega$ となることをいう．単に A が連結といったら，A で連結であるということとする．$\mathbb{K}$ が *trivial* であるとは，$\sup\{|A| : A \in \mathbb{K}, A$ は連結 $\} < \omega$ となることをいう．

命題 5. *$\mathbb{K}$ が trivial なら，$T = Th(M)$ is ω-stable*

証明 $\mathcal{M}$ を T の big model とし，A を $\mathcal{M}$ の可算部分集合とする．A は $\mathcal{M} - A$ と関係を持たないとしてよい．$\bar{a} = (a_1, \cdots, a_n), \bar{b} = (b_1, \cdots, b_n) \not\in A$ に対し，a_i たちの connected components の i についての和と b_i たちの connected components の i についての和が同型で，その同型によって $\bar{a}$ と $\bar{b}$ が移る時，$\bar{a}$ と $\bar{b}$ は A 上 type が等しい．connected component の形は有限通りしかないので，A 上の type の数は可算．

ここまでで，

- $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow T$ is ω-stable
- $\mathbb{K}$ is trivial $\Rightarrow T$ is ω-stable

が分かったので，今後の目標は，$\alpha \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{K}$ is non-trivial の時，T が superstable にはならないことを示すことにする．

これからよく扱う hypergraph の形に名前をつけておく．

- $I_n = \{a_1, \cdots, a_n\}$, 但しどの３つ組も R で関係をもたない．
- $I_\infty = \{a_1, a_2, \cdots\}$, 但しどの３つ組も R で関係をもたない．
- $D_n = \{a, b_1, c_1, \cdots, b_n, c_n\}$, 但し $\{b_i, c_i\} \neq \{b_j, c_j\}$ for $i \neq j$ であって，$R(a, b_i, c_i)$ for each $i = 1, \cdots, n$ and no other relations.
- $D_\infty = \{a, b_1, c_1, b_2, c_2, \cdots\}$, 但し $\{b_i, c_i\} \neq \{b_j, c_j\}$ for $i \neq j$ であって，$R(a, b_i, c_i)$ for each $i = 1, \cdots, n$ and no other relations.

D_n や D_∞ のことを daisy flower と呼ぶこともある．

補題 6. $\exists a \in M, \exists B \subset M$ *infinite s.t.* $\sup\{\mathrm{d}_M(a, b) : b \in B\} < \omega$
$\Longrightarrow \exists D_\infty \subset M$.

さらに，$D_\infty = \{a', b_1, c_1, b_2, c_2, \cdots\}$ のとき，$(b_i, c_i)_{i<\omega}$ が a' 上 *indiscernible* になるようにできる．

証明 L-構造 A と $a \in A$ に対し，$\deg_A(a) = |\{b \in A : \mathrm{d}_A(a, b) = 1\}|$ と定める．

Claim $\exists a' \in M$ s.t. $\deg_M(a') = \infty$.

そうでないとする．次のようにして，M の元を並べて有限分岐の tree を考える：

- a からスタートし，$\mathrm{d}_M(a, b) = 1$ となるすべての点 $b_1, \cdots, b_k$ に分岐する．
- 次に，$\mathrm{d}_M(b_1, c) = 1$ となるすべての点を並べて，b_1 から分岐させる．
- これを繰り返す．

すべての $b \in B$ は深さ $k_0 = \sup\{\mathrm{d}_M(a, b) : b \in B\}$ までに登場する．
ところが深さ k_0 までには高々有限個しか点が無い．矛盾．(Claim 終わり)

Claim より，a' につながる (b, c) は無限にある．従って，次が充足的になる．

$\Gamma((x_i, y_i)_{i<\omega}) = \{R(a', x_i, y_i) : i < \omega\} \cup \{\{x_i, y_i\} \neq \{x_j, y_j\} : i < j < \omega\}$

この解 $(b_i, c_i)_{i<\omega}$ を a' 上 indiscernible にとる．この時，$\{a', b_1, c_1, b_2, c_2, \cdots\}$ は $R(a', b_i, c_i)$ の他に関係を持たない．なぜなら，例えば $R(a, b_1, b_2)$ が関係を持ったとすると $R(a, b_i, b_j)$ for all $i < j$ となるが，この集合の有

限部分で局所次元が負になる部分ができてしまう．M は generic 構造なのでそれは起こりえない．

補題 7. $\mathbb{K}$ が *non-trivial* なら，$\exists D_\infty \subset M$.

証明 次の性質 (*) で場合分けをする．

$$(*)\ \exists n < \omega \text{ s.t. for all } a, b \in M,\ \mathrm{d}_M(a,b) < \omega \Rightarrow \mathrm{d}_M(a,b) < n$$

(*) が成り立つ時は，$\mathbb{K}$ is nontrivial, M is saturated, (*) という３条件から，M の中に無限の大きさの connected subset がとれる．従って前補題より $\exists D_\infty \subset M$.

(*) が成り立たない時は，次が成立する．

$$\forall n < \omega, \exists a, b \in M \text{ s.t. } \mathrm{d}_M(a,b) = n.$$

このとき次を満たす無限列 $(a_i)_{i<\omega}$ が存在する : $\mathrm{d}_M(a_0, a_n) = n$ for each $n < \omega$

またこのとき，$\alpha \leq 2$ がわかる．実際，距離の定義にあるように $A_n = \{a_0, a_1, b_1, \cdots a_n, b_n\}$ が得られた時，A_n の局所次元が一番大きくなるのは b_i がすべて相異なり，関係が $R(a_i, a_{i+1}, b_{i+1})$ for each $0 \leq i \leq n$ のみの場合である．よって $2n + 1 - n\alpha \geq 0$. すべての n についてこれが成り立つので $\alpha \leq 2$.

Claim $\exists A \subset M$ s.t. A is finite, connected, and $\exists a, b \in A$ s.t.$\{a, b\} \leq A$

少し複雑な場合分けになる．

Case1 $\exists i \geq 4$ s.t. $R(a_{i-1}, b_{i-1}, a_i)$ のとき．

$\{a_0, a_i\} \leq \{a_0, a_1, b_1, \cdots, a_{i-1}, b_{i-1}, a_i\}$

Case2 $\exists i \geq 4$ s.t. $R(a_{i-1}, b_{i-1}, b_i)$ のとき．

$\{a_0, b_i\} \leq \{a_0, a_1, b_1, \cdots, a_{i-1}, b_{i-1}, b_i\}$

Case3 $\exists i \geq 4$ s.t. $\neg R(a_{i-1}, b_{i-1}, a_i)$ かつ $\neg R(b_{i-1}, b_i, a_i)$ のとき．

$\{a_0, a_i\} \leq \{a_0, a_1, b_1, \cdots, a_{i-1}, b_{i-1}, a_i, b_i\}$

Case4 $\forall i \geq 4$, $\neg R(a_{i-1}, b_{i-1}, a_i)$, $\neg R(a_{i-1}, b_{i-1}, b_i)$, かつ $R(b_{i-1}, b_i, a_i)$ のとき．

このとき，話を単純にする為，b_i はすべて相異なり，関係は $R(a_i, a_{i+1}, b_{i+1}), R(b_i, a_{i+1}, b_{i+1})$ for each $i < \omega$ のみであると仮定する．すると，

$$\forall n < \omega, 2n + 1 - (2n+1)\alpha \geq 0.$$

よって，$\alpha \leq 1$. 従って，$\{a_0, a_i\} \leq \{a_0, a_1, b_1, \cdots, a_{i-1}, b_{i-1}, a_i, b_i\}$.
(Claim 終了)

$I_\infty = \{b_0, b_1, b_2, \cdots\} \leq M$ がとれる．実際，M は無限なので Ramsey の定理よりすべての３点が関係をもつ無限部分集合かすべての３点が関

係をもたない無限部分集合が存在するが，前者はその有限部分で局所次元が負になる部分があるので generic 構造の中には存在しない．M の中で closed にとれることは，M の genericity と saturatedness から従う．この I_∞ について，$\{b_0, b_i\} \leq M$. Claim の A の a, b とこの b_0, b_i を同一視して，M の genericity より，A と $\{a, b\}$ 上同型な構造が M の中にとれる．このとき，

$$\mathrm{d}_M(b_0, b_i) = \mathrm{d}_M(b_0, b_j) < \omega \text{ for each } i, j < \omega.$$

従って，前補題より D_∞ が存在する．

3 主定理の証明

定理 8. α が無理数で，$\mathbb{K}$ が *non-trivial* なら，$T = Th(M)$ *is strictly stable.*

事実 9. *[6]* 次は同値である：

- T *is superstable*
- 次を満たす無限上昇列 $A_i (i < \omega)$ と *type* の上昇列 $p_i (i < \omega)$ は存在しない：

  p_i は A_i 上の *type* で，p_{i+1} *forks over* A_i.

M の有限部分 A に対して，A の M における d-dimension を，$\mathrm{d}_M(A) = \delta(\mathrm{cl}_M(A))$ と定める．相対次元を M の有限部分 A, B に対して $\mathrm{d}_M(A/B) = \mathrm{d}_M(AB) - \mathrm{d}_M(B)$ と定める．

事実 10. *[5]* $\mathbb{K}$ が *subhypergraphs* について閉じていて有限閉包性をもち，A, B, C が M の有限部分構造で，$B, C \leq M$ かつ $A = B \cap C$ とするとき，次は同値である：

- $\mathrm{d}(B/A) = \mathrm{d}(B/C)$
- $\mathrm{tp}(B/C)$ *does not fork over* A

これらの事実を用いて“forking の無限列”を構成する．

定理の証明 前補題より (infinite indiscernible) daisy flower が存在する．その形について場合分けをする．

Case1 daisy flower $\{a, b_1, c_1, \cdots\}$ の b_i, c_i たちがすべて相異なるとき．

Claim $0 < \forall \epsilon < \alpha$, $\exists \{eBC\} \in \mathbb{K}$ s.t.

1. $-\epsilon < \delta(C/eB) < 0.$
2. $\delta(X/eB) > 0$ for all nonempty proper subset X of C

3. $\delta(C/Y) > 0$ for all nonempty proper subset Y of eB.

α が無理数なので，

$$\min\{n : -\epsilon < n - q\alpha < 0 \text{ for some } q < \omega\}$$

が存在する．これを p とおく．$-\epsilon < p - q_p\alpha < 0$ となる q_p をとる．$p = 1$ のときは，$eBC = D_{q_p}$ でよい．

$p \geq 2$ のときは，便宜上 $q_1 = 0$ とおいて，各 $2 \leq n < p$ に対し，$q_n = \max\{q : n - q\alpha > 0\}$ とおく．また，各 $1 \leq n \leq p$ に対し，$d_n = n - q_n\alpha$ とおく．

$2 - \alpha > 0$ より $q_2 \geq 1$. daisy flower D_{q_2} の中心を c_1，1つの花びらを e, c_2, 残りの部分を B_1 と名付ける．$D_{q_2} \leq M$ としてよい．このとき，$c_2 \leq D_{q_2} \leq M$.

$q_3 > q_2$ の場合，c_2 を中心とする daisy flower $D_{q_3-q_2}$ を考えると，$c_2 \leq D_{q_3-q_2}$. 従って M の genericity から $D_{q_2} \cup D_{q_3-q_2}$ が M の closed set として取れる．またこのとき，c_2 を中心とする花びらが新しくちょうど $q_3 - q_2$ 枚加わったと仮定してよい．新しく加わった花びらの中の1点を c_3, その他を B_2 とする．

$q_3 = q_2$ の場合は，D_{q_2} とは独立な点を c_3 とおく．

どちらの場合でも，$c_3 \leq eB_1B_2c_1c_2c_3$ となるので，再び c_3 を中心とする花びらを $q_4 - q_3$ 枚新しく加えることができる．

これを繰り返して

$$B = B_1 \cup \cdots \cup B_p,\ C = \{c_1, \cdots, c_p\}$$

とする．eBC が求める性質をもつことを確認する．

$$\begin{aligned}
\delta(C/eB) &= |C| - r(C, eB) \\
&= p - \alpha\sum_{i=1}^{p-1}(q_{i+1} - q_i) \\
&= p - \alpha q_p
\end{aligned}$$

となるので，(1) が成立する．但し，$r(C, eB)$ は C と eB の間の関係の数，即ち $r(C, eB) = r(eBC) - (r(eB) - r(C))$.

X を C の空でない真部分集合とする．

Subclaim X が eBC で連結なら $\delta(X/eB) > 0$.

$X = \{c_i\}_{n<i\leq m}$ と書くと，$n = 1$ のとき，$m < p$ となり，

$$\delta(X/eB) = \begin{cases} m - q_m\alpha & (m \geq 2) \\ 1 & (m = 1) \end{cases}$$

であり，$n \geq 2$ のとき，

$$\delta(X/eB) = m - (n-1) - \alpha$$

となるので，いずれの場合も $\delta(X/eB) > 0$. (Subclaim 終了)

一般の X に対して，X の連結成分を X_i としたとき，$\delta(X/eB) = \sum \delta(X_i/eB) > 0$ となるので，(2) が成立する．

また，Y を eB の空でない真部分集合とすると，$\delta(C/Y) \geq \delta(C/eB) + \alpha > -\epsilon + \alpha$ となり，(3) も成立する．(Claim 終了)

i_0 を十分大きくとり，Claim において，$\epsilon = \frac{1}{2^{i_0+i}}$ に対して eB_iC_i をとる (for each i).

このとき，e は共通にとり，$i \neq j$ のとき B_iC_i と B_jC_j の間には全く関係が無いと仮定してよい (eB_1C_1 ができたら，e を中心にして B_1C_1 と独立になるように B_2C_2 の構成を始める $\cdots$)．

$B_n^* = \bigcup_{i \leq n} B_i$, $C_n^* = \bigcup_{i \leq n} C_i$ とおき，$eB_n^*C_n^* \leq M$ と仮定してよい．

このとき，$\mathrm{cl}(eB_n^*) = eB_n^*C_n^*$ である．実際 C_n^* の 任意の真部分集合 X に対し，

- $\delta(eB_n^*C_n^*/eB_n^*X) = \sum \delta(eB_iC_i/eB_i(X \cap C_i))$
- $\delta(eB_iC_i) \leq \delta(eB_i(X \cap C_i))$, かつ
- $X \cap C_i \neq C_i \Rightarrow \delta(eB_iC_i) \leq \delta(eB_i(X \cap C_i))$

なので，$\delta(eB_n^*C_n^*/eB_n^*X) < 0$.

また，$B_n^* \leq eB_n^*C_n^*$ である．実際，任意の $X \subset eC_n^*$ に対し，

Case1 $e \in X$ のとき，

$$\begin{aligned}
\delta(X/B_n^*) &= \delta(X/eB_n^*) + \delta(e/B_n^*) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \delta(X \cap C_i/eB_i) + 1 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Case2 $e \notin X$ のとき，C_i の任意の空でない真部分集合 Y に対して $\delta(Y/B_i) > 0$ となることに注意すると，

$$\delta(X/B_n^*) = \sum_{i=1}^{n} \delta(X \cap C_i/B_i) > 0.$$

以上より,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_M(e/B_n^*) &= \mathrm{d}_M(eB_n^*) - \mathrm{d}_M(B_n^*) \\ &= \delta(eB_n^*C_n^*) - \delta(B_n^*) \\ &= \delta(eC_n^*/B_n^*) \\ &= \delta(C_n^*/eB_n^*) + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \delta(C_i/eB_i) + 1 \end{aligned}$$

がわかり, 従って

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_M(e/B_{n+1}^*) &= \sum_{i=1}^{n} \delta(C_i/eB_i) + 1 \\ &= \mathrm{d}_M(e/B_n^*) + \delta(C_{n+1}/eB_{n+1}) \\ &< \mathrm{d}_M(e/B_n^*) \end{aligned}$$

となる.

事実 10 より $\mathrm{tp}(e/B_{n+1}^*)$ は B_n^* 上 fork する. 事実 9 より T is not superstable.

Indiscernible daisy flower の形はもう 1 つある $(\forall i, j, b_i = b_j)$ が, 形が異なるだけで同様の計算によって定理が成立することが確かめられる.

以上より次の定理が得られた.

定理 11. *有限 (ternary)hypergraphs のクラス $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_\alpha$ が subhypergraphs について閉じていて有限閉包性をもつとする. このとき, 任意の saturated $\mathbb{K}$-generic hypergraph は ω-stable か strictly stable になる.*

参考文献

[1] J.T.Baldwin, Problems on pathological structures, In Helmut Wolter Martin Weese, editor, Proceedings of 10th Easter Conference in Model Theory (1993) 1-9

[2] J.T.Baldwin and N.Shi, Stable generic structures, Annals of Pure and Applied Logic 79 (1996) 1-35

[3] K.Ikeda, Algebraic typesof generic graphs, 京都大学数理解析研究所講究録 1450, 63-68, 2005 年 9 月

[4] K.Ikeda, A remark on the stability of saturated generic graphs, Journal of the Mathematical Society of Japan, vol.57, no.4(2005)

[5] K.Ikeda, Forking in Generic Structures, preprints

[6] A.Pillay, An introduction to stability theory, Oxford : Clarendon press, 1983

[7] F.O.Wagner, Relational structures and dimensions, Kaye, Richard (ed.) et al., Automorphisms of first-order structures. Oxford: Clarendon Press. 153-180 (1994)